

Dynamique d'Évolution des Stocks et Stabilisation des Oscillations Induite

Rodrigue Tchapnga Takoudjou

334 Snell Engineering Center
Department of Mechanical and Industrial Engineering
Northeastern University
360 Huntington Avenue
Boston, MA 02115 – USA
`rodrigue.tchapnga-takoudjou@etu.univ-nantes.fr`

Résumé L'oscillation du niveau du stock n'est pas souhaitable car elle engendre des pertes pour l'entreprise. Dans le cas d'une inflation du stock, il faut trouver de nouveaux capitaux pour le stockage, la surveillance et l'entretien de l'excès de production. Dans le cas d'une déflation du stock, le problème majeur est la perte des clients et la détérioration de l'image de l'entreprise car elle est incapable de répondre à la demande. On est donc face à deux aspirations antinomiques : avoir les coûts de possessions les plus bas possibles d'une part et être capable de répondre efficacement à la demande d'autre part. Les causes à l'origine de l'oscillation du niveau du stock sont multiples. L'une d'elles est le retard qui est présent de façon inhérent dans une chaîne logistique : les temps de prise de décision, de fabrications et de transport sont à l'origine du retard et par conséquent de l'oscillation du stock autour d'un ensemble de points. Devant l'impossibilité d'éliminer complètement le retard d'une chaîne logistique, il est donc nécessaire de déployer une stratégie de gestion qui assure la stabilité du stock. Nous développons ici une stratégie utilisant une approche système dynamique. Les conditions de stabilité du stock sont alors établies en combinant la théorie de la stabilité et celle des systèmes dynamiques. Enfin quelques cas d'études sont fournis afin de montrer différents scénarios de stabilisation.

1 Introduction

Une chaîne logistique (Supply Chain) est le transfert des produits et de l'information le long des processus logistiques à partir de l'achat des matières pre-

mières jusqu'à la livraison des produits finis au consommateur. La chaîne d'approvisionnement inclut tous les fournisseurs de services et les clients. Les flux de marchandises circulent de l'amont vers l'aval et les flux d'information dans les deux sens.

L'optimisation de la qualité de services qui permet de gagner de nouveaux débouchés, les gains de productivité et de sécurité, la mondialisation de l'économie font de la gestion de la chaîne logistique un *enjeu stratégique*.

À un très haut niveau, une chaîne logistique comprend deux processus basiques et intégrés [8] : la planification de la production couplée à la gestion des stocks et le processus logistique couplé à la distribution.

1.1 Planification de la production et gestion des stocks

La planification de la production consiste en la conception, planification et gestion des processus de production. La gestion des stocks a pour objectif de trouver des solutions aux problèmes suivants : déterminer la taille initiale des stocks en cohérence avec les objectifs de l'entreprise (estimation de la demande très probable de l'entreprise sur une ou plusieurs périodes, mesures des risques de non réalisation des prévisions), actualisation des stocks et robustesses (résistance aux perturbations : demande stochastique, problèmes de délais...)

1.2 Processus logistique et distribution

Pour pouvoir délivrer des produits depuis l'entrepôt soit directement soit indirectement jusqu'au client, il faut pouvoir définir des routes, des tournées ou des circuits de distributions optimisés et dans le cas où elles existeraient pouvoir les réorganiser suivant des critères de coûts, capacité de véhicules, fenêtres de temps...

1.3 Technique de modélisations d'une chaîne logistique

Selon l'objectif visé, une chaîne logistique peut être modélisée et analysée de quatre façons [8] : *modèle déterministe, modèle stochastique, modèle économique et modèle de simulation.*

– Modèle Déterministe

Dans ce modèle, toutes les variables sont connues et spécifiées. On veut souvent déterminer le meilleur planning de production pour minimiser des coûts, organiser des circuits de distributions ; ce sont souvent des problèmes d'optimisation

sous contraintes. De tels problèmes étant en général NP – dur, les méthodes de résolutions exactes sont impossibles et l'utilisation d'heuristiques et de métaheuristiques de plus en plus sophistiquées permet d'avoir des solutions approchées intéressantes.

– Modèle Stochastique

Dans ce modèle, au moins une variable est inconnue et suit une loi de probabilité particulière.

– Modèle Économique

Il s'agit d'un modèle théorique, qui offre un cadre de travail dans lequel les relations entre un client et ses fournisseurs peuvent être modélisées. Cela permet ainsi au client en fonction de son intérêt de choisir quel type de relation est intéressante ou désirable.

– Modèle de Simulation

De nature, une chaîne logistique est composée de plusieurs couches, réparties sur plusieurs sites et communiquant entre elles. Le système à étage, le flot bruité d'informations, les retards et la mondialisation des échanges rendent le système réel inobservable ou difficilement observable. La simulation ici permet donc de reproduire virtuellement le comportement d'un phénomène réel. On peut ainsi observer l'évolution du système de façon plus générale, rechercher des équilibres globaux et étudier les conditions de stabilité du système complexe.

1.4 Chaîne logistique et indicateur de performance

Dans la construction d'une chaîne logistique, il importe de définir des outils d'analyses appropriés pour mesurer de façon précise l'efficacité, la précision et la performance du système. La présence de tels outils permet ainsi de construire des systèmes fiables répondant à des cahiers des charges validés par des experts ou d'améliorer l'existant. On peut définir des mesures (ou indicateurs de performances) *qualitatives* et *quantitatives*.

– Mesures Qualitatives

Ce sont des mesures non numériquement mesurables, bien que certains aspects le soient. En voici quelques exemples :

1. *la satisfaction des clients est généralement le rapport qualité prix, la qualité du service reçu,*
2. *la flexibilité, capacité d'adaptation de la chaîne logistique en cas de fluctuation de la demande,*

3. *la gestion effective des risques, le degré de minimisation des risques encourus par chaque entité de la chaîne ou du système.*

– Mesures Quantitatives

Celles-ci sont quantifiables et descriptibles numériquement. Quatre exemples importants de mesures de ce type sont ci-dessous présentés.

1. *le taux de minimisation de coûts,*
2. *la maximisation des ventes,*
3. *la maximisation des profits,*
4. *la stabilité du stock.*

1.5 Le challenge du stock

Le stock est un indicateur important pour mesurer la performance et l'efficacité d'une chaîne logistique, ces enjeux sont complexes et tactiques à la fois car les autres indicateurs dépendent plus ou moins de sa dynamique d'évolution. Dans une entreprise, on trouve des stocks à différents niveaux : stock de matières premières, stock de composants, stock d'en-cours, stock de produits finis etc. La difficulté de la gestion des stocks réside dans le but d'accomplir deux aspirations antinomiques : *garantir un taux de prestation le plus élevé possible et avoir un coût de possession le plus faible possible.*

Le premier impose la nécessité d'avoir des stocks les plus réactifs pour répondre de façon efficace à la demande [6] créant donc des coûts de possession et le second exige de minimiser les stocks et de les avoir le plus bas possible le risque étant de ne pas pouvoir répondre à la demande ce qui explique le paradoxe.

Régarçons le scénario suivant qui illustre une difficulté supplémentaire :

Dans une compagnie, le décisionnaire chargé de gérer le stock observe celui-ci avec attention. Dans un premier moment la demande des clients est constante jusqu'à l'instant t_0 . À partir de cette date, la demande croît. Objectivement et nécessairement, il faut répondre à cette demande. Après un temps d'observation et de réflexion τ_1 pour être sûr que la demande reste à ce niveau le décisionnaire ordonne une commande à son fournisseur plus importante que les précédentes et à même de répondre au besoin. Les nouveaux produits ordonnés prennent un temps τ_2 pour être façonnés et ils arrivent enfin en stock après un temps de transport τ_3 depuis l'intensification de la demande, il s'est écoulé un temps $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ avant que les nouveaux produits ne soient disponibles. Un problème survient

si à cet instant, la demande à de nouveau baissé. Elle est devenue inférieure à celle qui a motivé une forte commande créant ainsi une augmentation du stock.

Une problématique supplémentaire réside dans le dimensionnement initial des stocks face aux incertitudes de la prévision des futures demandes qui sont capricieuses.

Comme conséquence des problèmes ci-dessus évoqués le stock subit une oscillation soutenue et de grande amplitude causant ainsi son instabilité.

Sachant qu'une augmentation du stock au dessus du niveau prescrit lié à une désadaptation de la production à la demande du fait d'une saturation de la production crée des coûts importants (dévalorisation, emplacement supplémentaire, destruction ou vieillissement...) et qu'un épuisement du stock à des conséquences stratégiques et économiques néfastes, il importe d'étudier et de comprendre la dynamique d'évolution du stock afin de prendre de bonnes décisions et de définir des règles qui permettent de le stabiliser.

1.6 Conclusion

Dans cette introduction, nous avons essayé de présenter une chaîne logistique de façon globale, nous avons présenté ses deux constituants de base à savoir la partie planification de la production et gestion des stocks suivie de la partie processus logistique et distribution. Ensuite, nous avons défini les indicateurs de performance d'une chaîne logistique qui sont de natures qualitatives et quantitatives. Il est ressorti de notre analyse que le stock est clairement l'un des indicateurs de performances le plus crucial, il y a donc intérêt à comprendre sa dynamique d'évolution. Tel est donc notre but. Pour y arriver, dans la suite de notre exposé, nous présenterons dans une première partie quelques outils mathématiques et des définitions qui nous permettront dans une seconde partie de modéliser et d'étudier la dynamique du stock afin de dégager des conditions de stabilité du stock. Au final, on montrera comment cette carte de stabilité peut être utilisée comme un outil d'aide à la décision à l'heure où les systèmes à gérer sont de plus en plus complexe.

2 Mathématiques et modélisation de la dynamique d'évolution des stocks

On appelle système un ensemble de relations établies entre les grandeurs d'entrées, d'états et de sorties. Les sorties dépendent en principe de l'état du

système et de ses entrées. On distingue les systèmes selon divers critères, ainsi on parle de système continu ou de système discret, suivant la nature de l'axe des temps. On parle de système linéaire, non linéaire, déterministe ou stochastique suivant le contexte mathématique de la description.

Pour pouvoir étudier un système il est important de le modéliser. Cela consiste à munir le système d'importantes propriétés algébriques dans des espaces théoriques. L'objectif est de pouvoir rendre compte du comportement du système. On pourra dans certains cas faire appel aux représentations temporelles ou fréquentielles des systèmes qui modélisent des phénomènes naturels.

L'étude d'un système modélisé sous une forme particulière permet de procéder à une identification. Elle consiste à déterminer numériquement les paramètres qui régissent l'évolution du système. Une fois cette identification faite, on peut faire passer le système d'un état initial à état final prescrit en imposant aux entrées du système des valeurs particulières ; on parle de contrôlabilité. L'évolution du système vers un état final peut se faire en minimisant par exemple un certain critère on parle alors de contrôle optimal.

Très souvent, pour des raisons d'accessibilité, de disponibilité, d'entretien ou d'encombrement le signal de sortie est décalé par rapport à celui d'entrée d'un temps $\tau > 0$; on parle alors de retard pur.

2.1 Transformée de Laplace

Soit f une fonction de la variable réelle x . On suppose que f

- est continue par morceaux sur tout fermé $[0, p]$;
- est définie pour $x \geq 0$;
- vérifie $|f(x)| < Ce^{ax}$, $(a, C) \in \mathbb{R} * \mathbb{R}$.

On appelle transformée de Laplace de f la fonction complexe $\mathcal{L}[f(x)]$ définie par

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > a \quad (1)$$

$\Re(s)$: partie réelle de s .

L'application $f \rightarrow \mathcal{L}[f]$ est la *transformation de Laplace* de f .

Le côté attractif de cette transformation vient du fait qu'elle transforme l'intégration (dérivation) en division (multiplication) fournissant ainsi un outil de choix dans l'analyse des systèmes dynamiques linéaires, en ramenant la solution d'une équation différentielle à une solution d'une équation algébrique.

2.1.1 Quelques propriétés de la transformée de Laplace

Dans la liste de propriétés suivante, f et g désignent deux fonctions de la variable réelle x , $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Linéarité : $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$
 Produit de convolution : $\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \bullet \mathcal{L}[g]$
 Dérivation : $\mathcal{L}[f'] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt$
 $= [e^{-st} f(t)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$
 $= s\mathcal{L}[f] - f(0)$
 Par récurrence, $\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n \mathcal{L}[f] - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$.
 Cette dernière formule découlant par récurrence de la précédente.

2.2 Fonction de transfert

Soit le système représenté ci-dessous tel que x soit son entrée et y soit sa sortie.

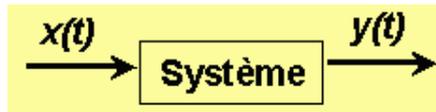


FIG. 1. Représentation d'un système

On pose :

$$a_0 x(t) + a_1 \frac{dx}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n x}{dt^n} = b_0 y(t) + b_1 \frac{dy}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m y}{dt^m}, \quad (2)$$

Par la transformée de Laplace, on obtient :

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s), \quad \mathcal{L}[y(t)] = Y(s), \quad (3)$$

$$X(s)(a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n) = Y(s)(b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m), \quad (4)$$

On appelle *Fonction de transfert* d'un système, le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et de celui d'entrée.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}. \quad (5)$$

La fonction de transfert dépeint la dynamique du système, elle n'est subordonnée qu'à ses caractéristiques physiques. Pour un système donné, on a :

$$Y(s) = T(s)X(s), \quad (6)$$

ce qui donne

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(s)X(s)]. \quad (7)$$

Les solutions de l'équation $Y(s) = 0$ sont appelées Zéros de T .

Les solutions de l'équation $X(s) = 0$ sont appelées Pôles de T .

2.3 Notion de stabilité d'un système

Il existe plusieurs définitions de la notion de stabilité non équivalente les unes des autres et de plus il existe une grande variété de techniques pour étudier la stabilité d'un système. L'intuition est celle-ci : si un système au repos excité par une impulsion de Dirac revient à sa position de repos après un certain temps on dit que le système est stable.

– Théorème

Un système n'est stable que si tous les pôles de sa fonction de transfert sont strictement à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe.

Comme technique d'analyse de la stabilité d'un système, on peut énumérer quelques méthodes suivantes : le critère algébrique de Routh-Hurwitz, le critère de stabilité de Nyquist, le critère du revers dans le plan de Black, la théorie des fonctions d'une variable complexes.

2.3.1 Stabilité des systèmes linéaire invariant dans le temps Soit un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = h(t). \quad (8)$$

Cette équation permet d'illustrer l'intérêt de la transformée de Laplace. si $\hat{x}(s)$ et $\hat{h}(s)$ désignent respectivement les transformées de $x(t)$ et $h(t)$, on déduit de (8) l'équation suivante

$$(s^2 + as + b)\hat{x}(s) = \hat{h}(s) + (s + a)x(0) + \dot{x}(0) \quad (9)$$

Cela montre que $x(t)$ dépend linéairement de $h(t)$ et des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$, la solution de l'équation différentielle s'écrit explicitement

$$\hat{x}(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} [\hat{h}(s) + (s + a)x(0) + \dot{x}(0)] \quad (10)$$

Par exemple, si on considère le système homogène avec $h(t) = 0$, et des conditions initiales stabilisées, $\dot{x}(0) = 0$, on obtient

$$\hat{x}(s) = \frac{x(0)(s + a)}{s^2 + as + b} \quad (11)$$

Le transfert entre condition initial $x(0)$ et l'état $x(t)$ est sur cette exemple égal à

$$T(s) = \frac{s + a}{s^2 + as + b} \quad (12)$$

Les pôles du système comme nous l'avons vu dans le théorème du paragraphe (2.3), jouent un rôle très important dans la stabilité de la solution. Ces *pôles* sont les zéros du dénominateur $s^2 + as + b$, ici au nombre de deux. Lorsque $a^2 \geq 4b$, on a deux pôles réels $s_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Lorsque $a^2 < 4b$, il y a deux pôles complexes conjugués $s_{1,2} = \frac{-a \pm j\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, $j \in \mathbb{C}$. Dans les deux cas les deux pôles sont stables si $a > 0$, instables dans le cas contraire. Lorsque $b = 0$, on a une simplification du transfert, et $\hat{x}(s) = \frac{1}{s}x(0)$, d'où l'on déduit $x(t) = x(0)$, $t \geq 0$. Si $a^2 - 4b = 0$, on a une solution double $d_1 = d_2 = -\frac{a}{2}$ et l'on obtient la solution suivante $x(t) = (at + 2)e^{-\frac{a}{2}t}$, avec $\dot{x}(0) = 0$. Dans les autres cas, on obtient la solution sous la forme $x(t) = Ae^{s_1 t}x(0) + Be^{s_2 t}x(0)$, où A et B sont données par $\frac{s+a}{s^2+as+b} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$, soit $A = \frac{a+s_1}{s_1-s_2}$, $B = \frac{a-s_2}{s_1-s_2}$.

En présence de retard ou de délai τ l'équation (8) devient :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a \frac{dx(t)}{dt} + bx(t - \tau) = h(t). \quad (13)$$

Après application de l'étude des pôles de (13), la transformée de Laplace, en suivant une procédure similaire à l'exemple précédent, nous conduit à l'étude de l'équation

$$s + a + be^{-\tau s} = 0, \quad (14)$$

On remarque que le délai τ de la description temporelle de (13) est devenu $e^{-\tau s}$ dans le domaine de Laplace.

Pour pouvoir analyser la stabilité de (13) il faut pouvoir déterminer le signe des parties réelles respectives des racines de (14) ce qui est $NP - dur$ dans le mesure où (14) à une infinité de solution, conséquence de la présence du terme transcendantal $e^{-\tau s}$.

Il est à remarquer que la considération de retards supplémentaires apporteraient pour chacun d'eux une nouvelle dimension de taille infinie dans l'analyse de la stabilité comme nous le verrons par la suite.

Il importe donc de définir une procédure spécifique d'analyse de stabilité pour ce type de problème. (Une telle procédure et un algorithme sont présentés en annexe du document) . Cette nouvelle procédure utilise notamment la théorie des fonctions d'une variable complexe et les propriétés suivantes :

- les solutions de l'équation caractéristique de la transformée de Laplace d'un SLIT sont des fonctions continues des retards respectifs qui composent le système. Ainsi si $\eta = \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$ et si s est une racine de (2.17), $s(\eta \pm v)$ sera dans le $v - \text{voisinage}$ de $s(\eta)$, pour $v \ll 1, l \in \mathbb{Z}_+$.
- La propriété de continuité des racines à pour conséquence le fait que la stabilité du système ne changera avec le retard que si les racines de l'équation caractéristique traversent l'axe imaginaire dans le plan complexe lorsque le retard évolue.

2.4 Équation de la dynamique d'évolution du stock

La suprématie des méthodes de la recherche opérationnelle dans les entreprises n'est plus à démontrer, elles sont généralement utilisées dans la deuxième partie qui compose le corps d'une chaîne logistique à savoir la partie le processus logistique et la distribution, pour l'optimisation desquelles elles ont fait leurs preuves. Toute fois, la première partie qui concerne la planification de la production et la gestion du stock, les longs temps de calculs, les difficultés de représenter la dynamique d'évolution des systèmes à retard pur, font souvent lui préférer des modèles d'équations différentielles à temps continu qui grâce à la théorie du contrôle et de ses méthodes aujourd'hui éprouvées permettent d'exprimer les caractéristiques fondamentales du système étudié et de plus permettent aisément de passer d'un domaine continu à un domaine fréquentiel en jouant le rôle de passerelle. Le domaine fréquentiel est particulièrement intéressant dans la mesure où il offre un cadre de travail adapté pour des systèmes à fortes oscillations. Le lecteur intéressé trouvera dans [5] une comparaison des

avantages et inconvénients de plusieurs techniques de modélisations. Pour les raisons évoquées ci-dessus, nous utiliserons des équations différentielles à temps continu dans la suite de notre exposé.

D'un point de vue physique, un stock peut être représenté comme un récipient qui reçoit d'un côté (des marchandises, des produits,...) et qui perd de l'autre (achat des clients, consommation,...). On le représente schématiquement dans la figure 2.



FIG. 2. Zone de stabilité avec variation des différents paramètres d'ajustements.

2.4.1 Heuristique de décision

Face aux incertitudes liées à l'aspect stochastique des demandes et en considérant les difficultés évoquées plus haut liées à la gestion du stock, le décisionnaire doit pouvoir définir une politique d'approvisionnement claire et efficace. Il doit donc posséder l'art de combiner et de coordonner diverses actions pour atteindre un objectif important : *la stabilité du stock*.

Dans les années 60, Jay Forrester développa au MIT un jeu de simulation de rôle nommé « beer game ». ce jeu permit de clarifier les avantages d'une approche intégrée pour piloter une chaîne logistique. Il simule le flux de matières et d'information dans un système de production-distribution, et met en avant l'effet « coup de fouet¹ » qui correspond à l'amplification de la demande le long de la chaîne. De cette simulation, les faits suivants furent remarqués : avant de décider d'un approvisionnement les participants prennent en compte les prévisions des futures demandes, le niveau actuel du stock et les en-cours de fabrication. L'analyse a conduit Sterman [1] à proposer sous les notations qui vont suivre l'heuristique de décision présenté et étudié ci-dessous.

I : Niveau du stock à l'équilibre.

i : Niveau du stock en fonction du temps.

\hat{L} : Estimation des demandes.

o : Demande.

p^c : Flux de produits en entrée du stock.

p^d : Flux de produits à fabriquer ordonné par le décisionnaire.

T : Fenêtre d'estimation

α^i : Variable d'ajustement du stock.

α^{WIP} : Variable d'ajustement de l'en-cours de production.

h : Délai de production ou de fabrication (lead time delay).

\hat{h} : Date de fin de production attendue.

$$p^d(t) = \hat{L}(t) + \alpha^i(I - i(t)) + \alpha^{WIP}(\hat{h}\hat{L}(t) - \int_{t-h}^t p^d(\sigma)d\sigma), \quad (15)$$

$$\hat{L}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t o(\sigma)d\sigma. \quad (16)$$

La loi qui gouverne la variation du niveau du stock est définie par :

$$\frac{di(t)}{dt} = p^c(t) - o(t). \quad (17)$$

¹ Bullwhip

où

$$g(t) = \frac{1}{T}(\alpha^{WIP}\hat{h} + 1 + \alpha^i T)o(t) - \frac{1}{T}(\alpha^{WIP}\hat{h} + 1)o(t - T). \quad (21)$$

on peut noter que la fonction $g(t)$ est la partie non homogène de (20).

Nous avons précédemment parlé de trois types de retards inhérents à la nature même d'une chaîne logistique. Au retard dû au temps de production modélisé en (18), on peut rajouter au modèle le délai de prise de décision (decision-making delay) et le délai de transport (transportation delay). Cet ajout nous conduit donc au modèle à trois retard que nous allons maintenant présenter.

Soient h_1, h_2, h_3 respectivement les délais de prise de décision, de fabrication et de transport. Pour pouvoir ordonner la fabrication de nouveaux produits, le décisionnaire a besoin d'un temps h_1 de réflexion pour mesurer l'en-cours de production. Ce qui fait introduire la quantité suivante au modèle $p^e(t)$ et on a ainsi la relation $p^e(t) = p^d(t + h_1)$. La durée de transport jusqu'au client final (stock) est h_3 donc $p^c(t)$ est retardée $p^c(t - h_3)$. Les modifications précédentes transforment (20) en

$$\frac{dp^e(t)}{dt} = -\alpha^{WIP}(p^e(t - \tau_1) - p^e(t - \tau_2)) - \alpha^i p^e(t - \tau_3) \quad (22)$$

où, sans nuire à la généralité, $h_2 = h$. $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $\tau_1 = h_1$, $\tau_2 = h_1 + h_2$, $\tau_3 = h_1 + h_2 + h_3$. L'équation caractéristique de (22) est

$$f(s, \tau) = s + \alpha^{WIP}(e^{-\tau_1 s} - e^{-\tau_2 s}) + \alpha^i e^{-\tau_3 s} \quad (23)$$

La présence de trois retards nous amène trois dimensions infinies à l'analyse de la stabilité à cause de la présence des opérandes transcendants dans l'équation caractéristique (23).

2.4.2 Interprétation des paramètres d'ajustement.

Nous avons deux paramètres d'ajustement à savoir α^i et α^{WIP} . Le Premier est une constante qui ajuste l'écart entre le niveau souhaité du stock ou niveau idéal et le niveau actuel ou courant du stock. $0 \leq \alpha^i \leq 1$. De façon similaire le second ajuste l'en-cours de production.

$\alpha^{WIP} \leq \alpha^i$, car la variation du niveau du stock est plus importante et facilement mesurable alors que celui de l'en-cours de production l'est plus difficilement ; l'information n'est pas toujours disponible, peut être bruité. La fraction $\beta = \frac{\alpha^{WIP}}{\alpha^i}$ vérifie alors $\beta \leq 1$. Elle mesure la prise en compte par le décisionnaire de toutes les informations disponibles dans la chaîne de production. En terme de α^i et β et supposant par exemple $g(t) = 0$, (20) s'écrirait par exemple

$$\frac{dp^d(t)}{dt} = -\alpha^i(\beta p^d(t) + (1 - \beta)p^d(t - h)). \quad (24)$$

2.5 Conclusion

Cette section fut pour nous l'occasion de présenter dans une première partie quelques définitions. Dans une seconde partie nous avons présenté des outils mathématiques tels que la transformée de Laplace, les notions de fonction de transfert, de pôles. Nous avons introduit quelques notions de stabilité et en particulier nous décrivons en annexe un algorithme d'analyse de système linéaire invariant dans le temps (SLTI). Enfin dans dans une dernière partie, nous avons introduit deux modèles (à un et à trois retards) caractérisant la dynamique d'évolution du stock et une fonction d'ordre basée sur une heuristique. Dans le prochain chapitre nous étudierons ces deux modèles, l'objectif étant d'extraire et d'identifier les conditions de stabilité du stock.

3 Domaine de stabilité du stock et politique de gestion

Dans cette partie, les notations introduites dans le précédent chapitre reste inchangées, les équations établies en (23) et (24) sont considérées. Pour des équations différentielles retardées, il existe deux types de stabilité : l'une dépendante du retard (delay dependent stability) et l'autre l'autre indépendante du retard (stability independent of delay). Nous présenterons des critères de stabilité pour l'un et l'autre.

3.1 Critère de stabilité : modèle à un retard pur

3.1.1 Stabilité indépendante du retard Le modèle à un retard pur est asymptotiquement stable [5] quelque soient les valeurs prises par le retard h , si et seulement si $\beta \geq \frac{1}{2}$.

3.1.2 Stabilité dépendante du retard Le modèle à un retard pur est asymptotiquement stable [5] si $\beta \leq \frac{1}{2}$ et si le retard h est inférieur au délai de production maximal h^* défini par la formule

$$h^* = \frac{\arccos\left(\frac{\beta}{(\beta-1)}\right)}{\alpha^i \sqrt{1-2\beta^2}}. \quad (25)$$

Ci-dessous un plan (figure 4) représentant pour chaque valeur de α^i et β le retard maximal pour lequel le stock est stable. ce plan peut être considéré comme un outil d'aide à la décision. On remarque les points suivant :

- Pour de plus petites valeurs de α^i on peut avoir des retards plus importants ce qui est tout à fait normal dans la mesure où le système répond faiblement aux variations du stock dans ces cas précis. Même si on peut avoir à certains moment un épuisement du stock, on a la garantie d'être protégé d'oscillations nuisibles.
- $\beta = \frac{\alpha^{WIP}}{\alpha^i}$ joue un rôle de choix dans la stabilité que celle-ci dépende ou non du retard ; cette fraction permet de mesurer le degré d'importance accordé par le décisionnaire au stock et à l'en-cours de production au moment de sa prise de décision. La réponse optimale du système s'obtient pour $\beta = 1$ dans le cas indépendant du délai. Cela signifie qu'il faudrait accorder la même importance au niveau actuel du stock qu'à l'en-cours de fabrication au moment de commander de nouveaux produits.

3.2 Critère de stabilité : modèle à trois retard purs

3.2.1 Modèle du problème à trois retards

L'équation caractéristique de la dynamique d'évolution du stock qui décrit le modèle à trois retards est donnée par (23). Comme vu plus haut, cette équation possède une infinité de racines son étude nécessite donc d'utiliser une procédure particulière qui est présentée en annexe (Procédure d'extraction de stabilité commutant des hypersurfaces). Nous présentons ci-dessous un exemple d'exécution de cet algorithme. Rappelons nous que l'objectif dans un premier moment est de

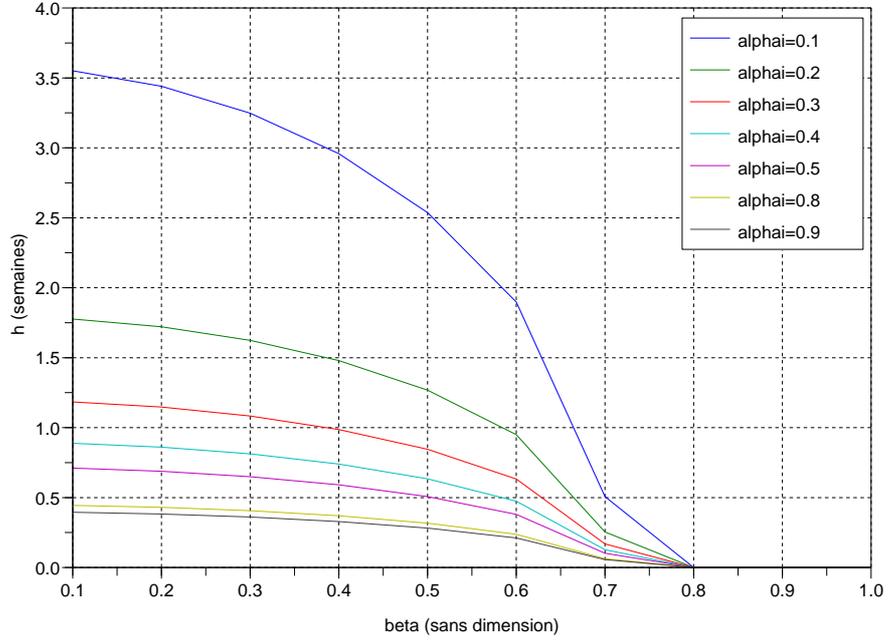


FIG. 4. Zone de stabilité avec variation des différents paramètres d'ajustements.

définir $\bar{\psi}$ qui est une hypersurface correspondant à toutes les valeurs de délais pour lesquels une racine de (23) est sur l'axe des imaginaires purs.

$$\bar{\psi} = \{\tau \mid f(s, \tau) = 0, s = jw, \tau \in \mathbb{R}_+^3, w \in \mathbb{R}_+\}. \quad (26)$$

On fixe τ_3 , et on pose $s = jw$ et résolvant l'équation (23) en terme de τ_1 et τ_2 , on obtient une courbe $\tau \in \bar{\psi}$ telle que

$$f(jw, \tau) = \frac{1}{\alpha^i} jw + \beta e^{-jw\tau_1} + \beta e^{-jw\tau_2} + e^{-jw\tau_3} = 0, \quad (27)$$

On peut écrire (27) comme somme de polynômes et obtenir

$$f(jw, \tau) = \sum_{k=0}^3 P_k(jw) e^{-jw\tau_k} \quad (28)$$

où $\tau_0 = 0$, rappelons aussi que w est une valeur de balayage borné à droite [3] et peut prendre plusieurs valeurs numériques successives, de ce fait w est connue. L'exécution de l'étape nommée « step a » de l'algorithme 1, donne

$$P_{1\Re}(w) = \beta, \quad P_{2\Re} = -\beta, \quad P_{1\Im} = P_{2\Im} = 0. \quad k = 1, 2 \quad (29)$$

De l'étape « step b. » on obtient

$$e^{-j\tau_k w} = x_k + jy_k, \quad k=1,2, \quad (30)$$

$$|e^{-j\tau_k w}| = 1 \Rightarrow C_k = x_k^2 + y_k^2 - 1 = 0, \quad k = 1, 2. \quad (31)$$

En combinant « step a. » et « step b. », il découle la relation

$$\Gamma_0(w) + x_2\Gamma_1(w) + y_2\Gamma_2(w) = 0, \quad (32)$$

où $\Gamma_k(w)$, $k = 0, 1, 2$ et où

$$\Gamma_0(w) = \frac{1}{\alpha^i \beta^2} \left(\alpha^i + \frac{w^2}{\alpha^i} - 2w \sin(\tau_3 w) \right), \quad (33)$$

$$\Gamma_1(w) = \frac{-2}{\beta} \cos(\tau_3 w), \quad (34)$$

$$\Gamma_2(w) = \frac{2}{\alpha^i \beta} (\alpha^i \sin(\tau_3 w) - w) \quad (35)$$

La combinaison des résultats précédents donne

$$x_{1,2} = \frac{-\Gamma_0\Gamma_1 \pm \Gamma_2 \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - \Gamma_0^2}}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}. \quad (36)$$

L'obtention de y_2 s'effectue en utilisant (31) ou (32). Puisque τ_3 est fixé et $x_2 = f(w)$, tant que $x_2 \notin \mathbb{R}$,

on fait varier w et on recalcule (33), (34), (35) puis enfin (36).

De (30) on déduit

$$\tau_k = -\frac{1}{w} (\angle(x_k + jy_k) \pm 2\pi m_k), \quad m_k \in \mathbb{Z}_+^\infty, \quad k = 1, 2. \quad (37)$$

3.2.2 Stabilité indépendante du retard

Le Système (23) est stable indépendamment des retards si et seulement si,

– pour τ_3 fixé, on a

$$0 \leq \alpha^i \leq \frac{\pi}{2\tau_3}, \quad (38)$$

et

–

$$\frac{(2\alpha^i\beta)^2}{(\alpha^i)^2 - 2\alpha^i w \sin(w\tau_3) + w^2} \prec 1. \quad (39)$$

3.2.3 Stabilité dépendante du retard

L'obtention de la courbe $\bar{\psi}$ nous permet de diviser le plan (h_1, h_2) en zone stable et instable. Le décisionnaire peut donc à chaque instant, pour une valeur de τ_3 fixée, reconnaître visuellement les valeurs de h_1, h_2 pour lesquelles le système est instable ou stable et de là prendre de bonnes décisions. Regardons l'exemple ci-dessous pour $\alpha^i = 0.4$ et $\tau_3 = 7$. Chaque courbe d'hypersurface représentée sépare le plan en deux parties. La partie hachurée correspond par continuité au domaine des valeurs de h_1 et h_2 pour lequel le stock est instable et la partie non hachurée correspond au domaine stable.

3.3 Politique de gestion du stock

Plus haut dans notre propos, nous avons parlé du fait qu'il existait plusieurs types de stocks (matières premières, en-cours de fabrications, produits finis). Dans une chaîne logistique, les problèmes à résoudre sont souvent de natures différentes : problèmes de transport, d'ordonnancement... Les entrées de ces problèmes sont des quantités physiques et le but c'est de trouver le moyen optimal (moindre coup) de les distribuer ou les collecter pour le transport ou bien dans l'objectif d'affecter de façon optimale des tâches aux ressources de plus en plus rares pour des problèmes d'ordonnements. Ces quantités physiques font clairement parties de l'un des types de stocks défini plus haut. Cela correspond à l'intuition qu'on a de ces phénomènes. En l'absence du stock, le processus peut s'effondrer ou s'arrêter. Le décisionnaire doit pouvoir prendre la bonne décision au bon moment en corrélation avec les objectifs de l'entreprise, ce qui nécessite un stock stable et robuste. La robustesse consiste principalement en la résistance aux perturbations extérieures qui peuvent affecter le stock et causer par exemple son instabilité. Cette tâche est donc ardue, mais elle n'est pas impossible comme le montrent les résultats obtenus dans notre étude. Nous montrerons dans les paragraphes qui suivent comment utiliser ces résultats. L'organisation naturelle d'une chaîne logistique crée de façon intrinsèque au moins trois types de retard à

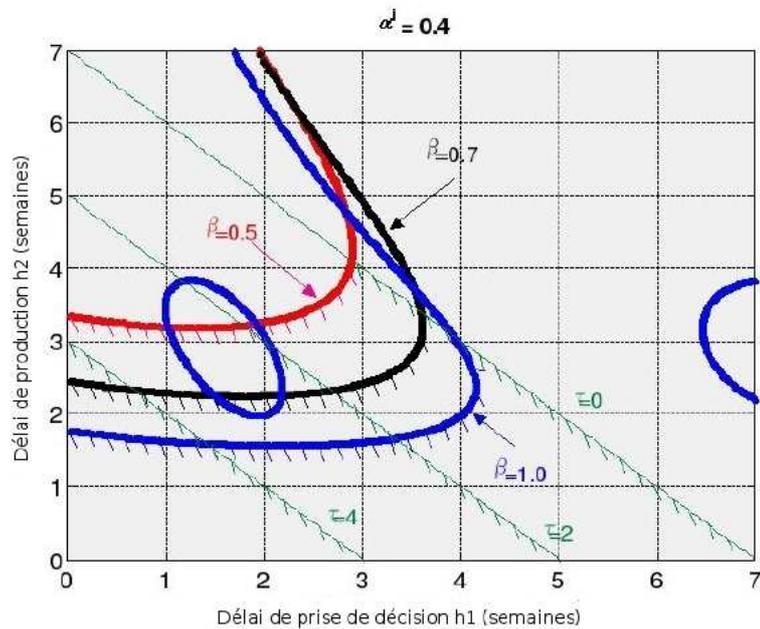


FIG. 5. Zones de stabilité avec courbes hypersurfaces.

savoir le temps de prise de décision, le temps de fabrication d'un produit ordonné par le décisionnaire après réflexion et enfin le temps de transport. La présence de ces retards ajoutée au fait que le demande est stochastique, complique le travail du décisionnaire. Il est utile pour celui-ci d'avoir un outil d'aide à la décision qui puisse l'aider à mettre en place une politique de gestion conduisant à une régulation robuste du stock. Un outil d'aide à la décision est nécessaire, dans la mesure où il n'est pas évident pour le décisionnaire d'évaluer l'impact de l'encours de fabrication, des délais de différentes natures et d'évaluer leurs effets sur le stock sur une période plus ou moins courte ou longue ou tout simplement sur une période donnée, de façon dynamique. Négliger un retard ou ne pas le prendre en considération peut conduire à un résultat opposé à l'objectif de régulation et nuire à l'efficacité du système de production.

Exemple de gestion du modèle à un retard pur

Pour ce modèle, nous avons présenté deux formes de stabilité l'une dépendante du retard et l'autre indépendante. Celle indépendante du retard était obtenue pour $\beta \geq \frac{1}{2}$. Elle est la plus intéressante dans la mesure où elle introduit une sorte de robustesse. Le temps de production peut varier indépendamment de la stabilité du stock. Celui-ci pourra alors subir une inflation ou une déflation mais finira par se stabiliser dans le temps. Pour la stabilité dépendante du retard, la figure 5 permet au décisionnaire pour une valeur de α^i donnée et pour un $\beta \leq \frac{1}{2}$ de connaître le délai maximal de production au delà duquel le stock devient instable. Par exemple pour $\alpha^i = 0.1$ et $\beta = 0.5$, le délai de production maximal doit être de *deux semaines et demi*.

Exemple de gestion du modèle à trois retards purs

Comme précédemment, il existe deux types de stabilité l'une dépendante du retard et l'autre indépendante du retard. Pour la stabilité indépendante du retard, les relations (38) et (39) permettent d'obtenir un domaine de valeurs stables pour α^i et β . Ainsi avec les deux valeurs ainsi calculées, le décisionnaire peut ordonner une quantité de produits qui ne créera pas une oscillation du stock et qui sera en corrélation avec les objectifs de bénéfices à atteindre. Par exemple pour $t_3 = 8$ semaines, on sait que $0 \leq \alpha^i \leq \frac{\pi}{16}$. Sans nuire à la généralité, choisissons $\alpha^i = 0.1$. Déduisons connaissant α^i et t_3 β de (39) ce qui donne $\beta = 0.30$. Le décisionnaire peut donc sur la base de ces deux valeurs ordonner une quantité de produits qui ne causeront pas l'instabilité du stock.

Pour le cas de la stabilité dépendante du retard, la carte (plan de stabilité) de la figure 5 permet de façon visuelle au décisionnaire pour α^i et β donné et pour un t_3 fixé d'identifier les retards qu'il ne peut se permettre ou se permettre en fonction de ses objectifs et ceci de façon visuelle.

4 Conclusion

À la fin de cette partie, nous pouvons dire que sa contribution est double. Dans un premier moment, nous avons étudié la stabilité du stock en considérant tour à tour le modèle à un retard puis celui à trois retard. La prise en compte de retards supplémentaires dans le dernier cas a été pour nous l'occasion de montrer sur un exemple l'algorithme d'extraction de la stabilité d'un modèle à retards

purs, notamment en calculant la courbe hypersurface séparant les zones stables et instables dans le plan complexe. Le résultat de cette étude est un ensemble de critères de stabilité qui peut être regardé comme un outil d'aide à la décision. Enfin une application numérique est fournie pour illustrer le raisonnement.

Annexe

Introduisons les notations suivantes :

$\Re(s)$: Partie réelle de s , $\Im(s)$ partie imaginaire de s , $\tau \in \mathbb{R}_+^l$ retard de dimension l , $i = \sqrt{-1}$, $s \in \mathbb{C}$.

L'équation caractéristique d'un SLIT à délai multiple est

$$f(s, \tau) = P_0(s) + \sum_{j=1}^l P_j(s)e^{-\tau_j s} = 0, \quad (40)$$

où $P_j(s) \neq 0$ est polynomial en s et à coefficient réel. Sans perte de généralité, déterminons la zone de stabilité dans le plan (τ_1, τ_2) en fixant τ_j $j = 3, \dots, l$.

Soient les courbe $\bar{\psi}(\tau_1, \tau_2)$ constituées par l'ensemble des points $(\tau_1, \tau_2, w) \in \mathbb{R}_+^3$ solutions de l'équation

$$f(iw, \tau) = P_0(iw) + \sum_{j=1}^l P_j(iw)e^{-i\tau_j w} = 0, \quad (41)$$

Ces points sont les valeurs de (τ_1, τ_2) pour lesquelles les solutions de l'équation (40) sont imaginaires pures. Pour pouvoir obtenir toutes les courbes $\bar{\psi}(\tau_1, \tau_2)$, on pose $\theta_3 = \tau_3 w$ comme paramètre de balayage. Sachant que

$$\Omega = \{w | f(iw, \tau) = 0, \tau \in \mathbb{R}_+^l, w \in \mathbb{R}_+\} \quad (42)$$

possède une borne supérieure (R). on définit $\theta_j = \frac{\tau_j \theta_3}{\tau_3}$, $j = 1, \dots, l$ et (40) devient :

$$P_0\left(i \frac{\theta_3}{\tau_3}\right) + \sum_{j=1}^l P_j\left(i \frac{\theta_3}{\tau_3}\right) e^{-i\tau_j \frac{\theta_3}{\tau_3}} = 0. \quad (43)$$

Apprécions ci-dessous l'algorithme qui va nous permettre d'extraire les courbes $\bar{\psi}(\tau_1, \tau_2)$, ce qui, de part le phénomène de continuité sus-mentionné, permet de détecter les zones de stabilité de (40).

Algorithm 1 Procédure d'extraction de stabilité commutant des hypersurfaces

step a. For dummy variable $j=0,1,2$, define the real and imaginary parts of P_j in (43) as :

$$P_{jR} = \Re(P_j(i\frac{\theta_3}{\tau_3})), P_{jI} = \Im(P_j(i\frac{\theta_3}{\tau_3})), \quad (44)$$

step b. For dummy variable $j=3,\dots,l$, all the terms in the summation correspond to a numerically known complex number for a given sweep parameter θ_3 . therefore, we distinguish them by defining the following $\sum_{j=3}^l P_j(i\frac{\theta_3}{\tau_3})e^{-i\tau_j\frac{\theta_3}{\tau_3}} = \chi(\theta_3) + i\gamma(\theta_3)$, where the pair $(\chi(\theta_3), \gamma(\theta_3)) \in \mathbb{R}^2$ is only a function of the sweep parameter θ_3 . define

$$e^{-i\tau_1\frac{\theta_3}{\tau_3}} = x + iy, \quad e^{-i\tau_2\frac{\theta_3}{\tau_3}} = u + iv \quad (45)$$

where $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Since τ_1 and τ_2 are unknown at the moment, so are the scalars x, y, u, v . Note also that the exponential terms on the left-hand side of (45) define a unit circle in \mathbb{C} . In other words the following holds

$$|e^{-i\tau_1\frac{\theta_3}{\tau_3}}| = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (46)$$

$$|e^{-i\tau_2\frac{\theta_3}{\tau_3}}| = 1 \rightarrow u^2 + v^2 - 1 = 0 \quad (47)$$

Following step a, b above, real and imaginary parts of equation (43) can be expressed as

$$A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{0R} + \chi(\theta_3) \\ P_{0I} + \gamma(\theta_3) \end{pmatrix} = 0 \quad (48)$$

where $A_j = \begin{pmatrix} P_{jR} & -P_{jI} \\ P_{jI} & P_{jR} \end{pmatrix}$ and $\det(A_j) = P_{jR}^2 + P_{jI}^2 = |P_j(i\frac{\theta_3}{\tau_3})|^2 \neq 0$, $j = 1, 2$, since $P_1(s) \neq 0$ and $P_2(s) \neq 0$

step d. The problem at hand reduces down to simultaneously solving the (x, y) and (u, v) pairs from the coupled equations of (46), (47) and (48). From (48), the (x, y) pair can be solved in terms of the pairs (u, v) since A_1 is invertible.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -A_1^{-1} \left(A_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{0R} + \chi(\theta_3) \\ P_{0I} + \gamma(\theta_3) \end{pmatrix} \right) \quad (49)$$

Back substituting the (x, y) solutions from above into (46) yields

$$\frac{u\Gamma_1(\theta_3, \tau_3) + v\Gamma_2(\theta_3, \tau_3) + \Gamma_0(\theta_3, \tau_3)}{(\det(A_1))^2} = 0 \quad (50)$$

Interestingly, in the numerator of (50) the coefficient u^2 and v^2 become equal, with help replace them using (47) and the coefficients of u, v terms vanish which results in (50). Now that (50) is in terms of the two remaining unknowns (u, v) , it is possible to concurrently solve for (u, v) from (47) and (50) and one obtains u as

$$u_{1,2} = \frac{-\Gamma_0\Gamma_1 \pm \Gamma_2\sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - \Gamma_0^2}}{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2} \quad (51)$$

By back substitution, one can obtain the corresponding (τ_1, τ_2) pair from (49) using (x, y, u, v)

$$\tau_1 = \frac{-\tau_3}{\theta_3} \angle(x + iy), \quad \tau_2 = \frac{-\tau_3}{\theta_3} \angle(u + iv) \quad (52)$$

the (τ_1, τ_2) pairs are those defining the $\bar{\psi}(\tau_1, \tau_2)$ curves.

Références

1. Sterman, J. D. : Modelling managerial behaviour misinterpretations of feedback in a dynamic decision-making experiment. *Management science* 35(3), 321–339 (1989)
2. Sipahi, R., Delice, I. I. : Identification of stability switching hypersurfaces of time delay systems with arbitrary number of delays. *Automatica* 45, 1449–1454 (2009)
3. Hale, J. K., Verduyn, S. M. : An introduction to functional differential equations. New York : Springer-Verlag (1993)
4. Datko, R. : A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations. *Quarterly of applied mathematics* 36, 279–292 (1978)
5. Riddalls, C. E., Bennett, S. Tipi, N. S. : Modeling the dynamics of supply chains. *International journal of systems science* 31(8), 969–976 (1999)
6. Brutman, T., Marcotti, G. : La gestion dynamique des stocks. *Supply chain magazine* 17, 60 (2007)
7. Bellman, R., Cooke, L. K. : Comments on professor Forrester's industrial dynamics-after the first decade. *Management science* 14(9), 600 (1963)
8. Beamon, B. M. : Supply chain design and analysis : models and methods. *International journal of production economics* 55, 281–294 (1998)