Résolution exacte du problème dual surrogate pour le problème de sac à dos tri-dimensionnel

Présentation :

Dans ce stage, nous nous intéressons à unproblème d'optimisation combinatoire très important : le problème de sac à dos multi-dimensionnel. Ce problème a été introduit en cours et sa modélisation est rappelée ci-dessous.

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\
&s.c. \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j \leq \omega_i && i = 1, \dots, m \\
&\quad x_j \in \{0, 1\} && j = 1, \dots, n && (mDKP)
\end{aligned}$$

où m est le nombre de dimensions (= nombre de contraintes), et les c_j, w_{ij} et ω_i sont des entiers positifs ou nuls.

Il existe une variante très simple dans cette classe de problème : le problème de sac à dos uni-dimensionnel, pour lequel il n'y a qu'une seule contrainte ($m = 1$). Dans ce dernier cas, des méthodes résolvant le problème en temps pseudo-polynomial ont été proposées, et des implémentations efficaces de ces méthodes sont disponibles.

Considérant un problème de sac à dos multi-dimensionnel, l'idée centrale de la relaxation *surrogate* est de se ramener un problème de sac à dos uni-dimensionnel. Cela est réalisé en par une somme pondérée des contraintes. Étant donné un vecteur de valeurs positives ou nulles $(u_1, \dots, u_m) \neq (0, \dots, 0)$ (que nous appellerons *multiplicateurs*), la relaxation surrogate est le problème défini par la modélisation suivante.

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\
&s.c. \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j \leq \sum_{i=1}^{m} u_i\, \omega_i \\
&\quad x_j \in \{0, 1\} && j = 1, \dots, n && (SR(u_1, \dots, u_m))
\end{aligned}$$

Comme nous pouvons le voir, nous obtenons une instances du problème de sac à dos uni-dimensionnel. Clairement, toute solution admissible pour le problème $(mDKP)$ est également admissible pour le problème $(SR(u_1, \dots, u_m))$. Par conséquent, une solution optimale du problème $(SR(u_1, \dots, u_m))$ définit une borne supérieure sur la valeur optimale du problème $(mDKP)$. De plus, cette borne supérieure est dépendante du choix des multiplicateurs $(u_1, \dots, u_m)$. Le problème *dual surrogate* consiste à trouver un vecteur de multiplicateurs $(u_1^*, \dots, u_m^*)$ permettant d'obtenir la meilleure borne supérieure possible, c'est-à-dire la plus petite.

Le but de ce stage est de proposer une méthode de résolution exacte du problème dual surrogate pour le problème de sac à dos tri-dimensionnel. Pour cela, nous partirons d'une méthode relativement simple proposée pour le cas bi-dimensionnel, que nous étendrons.

Mots-clés : Problème de sac à dos multi-dimensionnel, relaxation surrogate

Compétences requises : Langage C, GNU MathProg

Encadrant : Anthony Przybylski

Durée : 2 mois

Rémunération : Non