Relaxations linéaires de fonctions polynomiales sur les intervalles en optimisation globale

Améliorer les sandwiches

Laurent Granvilliers
LINA, Université de Nantes
laurent.granvilliers@univ-nantes.fr

Contexte L'optimisation globale consiste à calculer la valeur minimum d'une fonction objectif $f(x)$ sur un ensemble $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, appelée minimum global de f sur X, où X est décrit par un ensemble de contraintes. On s'intéresse ici au cas des fonctions et contraintes polynomiales en considérant des bornes $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$.

Les algorithmes de type *branch-and-bound* explorent l'espace de recherche $[\underline{x}, \overline{x}]$ de manière déterministe en cherchant à borner $f(x)$. Le calcul de minorants est réalisé en général par des techniques de programmation linéaire appliquées à des relaxations linéaires des fonctions. Ces relaxations peuvent être obtenues de différentes manières, par exemple par reformulation des expressions [4], par les modèles de Taylor du premier ordre [2] ou via l'arithmétique affine [3].

Étude Outre l'étude de l'existant, on s'intéressera aux relaxations linéaires décrites ci-après. Une relaxation *sandwich* d'un polynôme $p(x)$ avec $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$ est une forme linéaire $Lp(x) = a^T x + \boldsymbol{b}$ où a^T est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{b} = [\underline{b}, \overline{b}]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que les relations $a^T x + \underline{b} \leq p(x)$ et $p(x) \leq a^T x + \overline{b}$ soient vraies pour tout $x \in [\underline{x}, \overline{x}]$. Plus l'intervalle $\boldsymbol{b}$ est fin, plus l'encadrement de $p(x)$ par $Lp(x)$ est précis.

En particulier, Kolev a proposé une méthode pour créer des relaxations *sandwich* au moyen de l'arithmétique affine [1]. Elle permet de borner l'image directe des termes non-linéaires apparaissant dans $p(x)$ sur le domaine $[\underline{x}, \overline{x}]$ par des calculs pessimistes sur les intervalles. Le travail proposé vise à améliorer le calcul des encadrements de ces images. On pourra considérer les polynômes à une variable dans un premier temps, puis les polynômes à plusieurs variables dans un second temps.

Un prototype sera développé afin de valider les études de manière expérimentale. Il intégrera plusieurs modules dont la manipulation de polynômes, l'arithmétique des intervalles et l'arithmétique affine. Son architecture sera discutée pendant le stage. Enfin, le travail pourrait être finalisé par la rédaction d'un rapport de recherche.

Références

[1] Lubomir V. Kolev. An improved interval linearization for solving nonlinear problems. *Numerical Algorithms*, 37:213–224, 2004.

[2] Youdong Lin and Mark A. Stadtherr. LP strategy for the interval Newton method in deterministic global optimization. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 43(14):3741–3749, 2004.

[3] Jordan Ninin, Frédéric Messine, and Pierre Hansen. A reliable affine relaxation method for global optimization. *4OR*, pages 1–31, 2014.

[4] Hanif D. Sherali and H. Tuncbilek. A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a reformulation-linearization technique. *Journal of Global Optimization*, 2(1):101–112, 1992.